

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.
2018-19 учебный год. 6 класс.

Ответы

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

| Задача | Ответ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|--|--|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1. | 692 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | 400 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | 27 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | 20 или 21. <i>Правильный ответ — 5 баллов. Один ответ — 2 балла. Два верных и один неверный — 2 балла. Любой другой ответ — 0 баллов.</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5. | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td>•</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> <i>Например так. Дети могут придумать другие примеры!</i> </p> <p style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-top: 10px;"> <i>Проверять правильность. Любой верный ответ — 5 баллов!</i> </p> | | • | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | • | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6. | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7. | Синяя | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8. | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9. | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10. | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Задача | Ответ |
|--------|---|
| 11. | <i>Проверять пример! Например, так: $(2 + 2 + 1) \times 1 : 2 \times (0 + 1) \times 8$</i> |
| 12. | 12 |
| 13. | 16 |
| 14. | 1 — лжец, 2 — хитрец, 3 — рыцарь. |
| 15. | 900^2 . За отсутствие единиц измерения не снижать! |
| 16. | 1,5 км (или 1500 м) <i>Ответ «1,5» без «км» засчитывать!</i> |
| 17. | Дима больше на 325 |
| 18. | 6 |
| 19. | 8 |
| 20. | 53 |

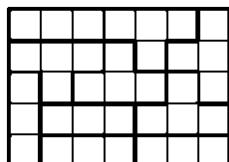
**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.
2018-19 учебный год. 7 класс.**

Ответы

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

| Задача | Ответ |
|--------|--|
| 1. | 680 |
| 2. | 17 |
| 3. | 37 |
| 4. | На 4 |
| 5. | 13 |
| 6. | 23, 24 или 25. <i>Один ответ — 1 балл. Два ответа — 3 балла. Каждый неверный ответ — снимается 2 балла, но не ниже 0.</i> |

7.



*Например,
так. Дети
могут
придумать
другие
примеры!*

*Проверять правильность. Любой
верный ответ — 5 баллов!*

| | |
|-----|----|
| 8. | 5 |
| 9. | 28 |
| 10. | 24 |

| Задача | Ответ |
|--------|---------------------|
| 11. | 21 |
| 12. | 192 |
| 13. | 3 |
| 14. | Дима больше на 3875 |
| 15. | 2 |
| 16. | 38 |

17.

Можно. 1 — лжец. 2 — хитрец. 3 — рыцарь

18.

95 км/ч. За отсутствие единиц измерения не снижать!

19.

9

20.

Принимать **любой** из двух ответов: $4=30, B=75$ или $,4=25, B=50$.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018

8 класс

8-1. На именины бабушки Зины пришло 16 гостей. Оказалось, что присутствующие съели 130 конфет, причем девочки съели по 13 штук, мальчики - по 5, взрослые гости - по 4, а сама бабушка Зина - 17. Сколько было среди гостей девочек, мальчиков и взрослых?

Ответ. 5, 4 и 7 гостей.

Решение. Обозначим число девочек через k , мальчиков - t . Тогда условие задачи можно записать в виде $13k + 5t + 4(16 - k - t) + 17 = 130$. После упрощения равенство приобретает вид $t = 49 - 9k$. При этом число взрослых гостей равно $16 - k - (49 - 9k) = 8k - 33$. Числа $49 - 9k$ и $8k - 33$ неотрицательны, то есть $0 \leq k \leq 5$, так что k может быть равно только 5.

Критерии. Ответ без обоснования - 1 балл. Ограничения на число гостей в группе - 3 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

8-2. Миша задумал число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Могло ли оказаться, что ровно пятеро друзей сказали правду?

Ответ: Нет, не могло.

Решение. Предположим, что пятеро друзей сказали правду. Если какой-то друг сказал правду, то все последующие друзья также правы. Значит эти пятеро — друзья с номерами 6, 7, 8, 9, 10. По словам шестого друга, n делится на 6, 7, 8, 9 и 10. Но тогда оно делится и на все числа, меньшие 6, то есть правы все 10 друзей.

Критерии. Указано, какие именно пятеро друзей правы - 3 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

8-3. Нечетные числа m и n взаимно просты. Найдите НОД чисел $m + n$ и $m^2 + n^2$.

Ответ: 2.

Решение. Пусть оба числа $m + n$ и $m^2 + n^2$ делятся на d . Тогда на d делится также число $(m - n)(m + n) = m^2 - n^2$. Значит, d будет делителем чисел $(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2$ и $(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2$. Но по условию у чисел m и n нет общих делителей, так что d — делитель числа 2. Заметим также, что числа $m + n$ и $m^2 + n^2$ — четные, так что $\text{НОД}(m + n, m^2 + n^2) = 2$.

Критерии. Если НОД вычислен только для конкретных пар (m, n) - 0 баллов. Если показано что НОД есть делитель числа два - 5 баллов. За полное решение задачи 7 баллов.

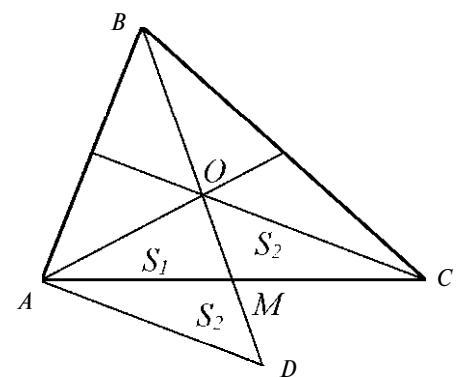
8-4. Найти площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 9.

Ответ: 72.

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан. Тогда площадь треугольника AOC составляет одну треть от S_{ABC} (у них общие основания, а высоты относятся как 1 : 3). Продолжим медиану BM на отрезок $MD = OM$. Треугольники OMC и AMD равны по двум сторонам и углу M между ними. Значит, $SAOD = SAOC = S$.

Стороны треугольника AOD составляют $2/3$ от длин медиан, то есть 8, 10 и 6. Это прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетами 6 и 8. Площадь его равна $S = 6 \cdot 8 / 2 = 24$. Искомая площадь в три раза больше S .

Критерии. За полное решение задачи 7 баллов.



8-5. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была больше а) 13; б) 11?

Ответ. а) нет; б) да.

Решение. а) Пусть a^1, a^2, \dots, a^8 - числа, расставленные на окружности в порядке обхода. Если сумма любых трёх соседних чисел больше 13, то

$$a^1 + a^2 + a^3 > 14,$$

$$a^2 + a^3 + a^4 > 14,$$

$$a^8 + a^1 + a^2 > 14.$$

Складывая эти неравенства, получим $3(a^1 + a^2 + \dots + a^8) > 8 \cdot 14 = 112$. С другой стороны, $a^1 + a^2 + \dots + a^8 = 1 + 2 + \dots + 8 = 36$. Получаем противоречие, $3 \cdot 36 > 112$.

б) Приведём пример требуемого расположения чисел:

$$a^1 = 1, a^2 = 5, a^3 = 6, a^4 = 2, a^5 = 4, a^6 = 7, a^7 = 3, a^8 = 8.$$

Критерии. В каждом пункте ответ без обоснования — 0 баллов. Полное решение — а) 4 балла; б) 3 балла.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018

9 класс

9-1. Миша задумал трёхзначное число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй заявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Миша знает, что из 10 друзей только трое сказали правду. Какое число задумал Миша? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 360 или 720.

Решение. Ясно, что задуманное Мишей число n делится на 10, в противном случае все 10 друзей сказали неправду. Аналогично получается, что n кратно 9 и 8, и значит, n делится на их НОК, то есть на 360. Но тогда n обязательно делится на все числа от 1 до 10 и не делится на 7. В этом случае первые 7 друзей ошиблись, а остальные сказали правду. Среди трёхзначных чисел только 360 и 720 делятся на 360.

Критерии. Указаны оба числа без обоснования — 3 балла. Доказано, что искомое число кратно 360 — 3 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

9-2. Число умножили на сумму его цифр. Могло ли при этом получиться число 200 ... 0018 (в записи 100 нулей)?

Ответ: нет, не могло.

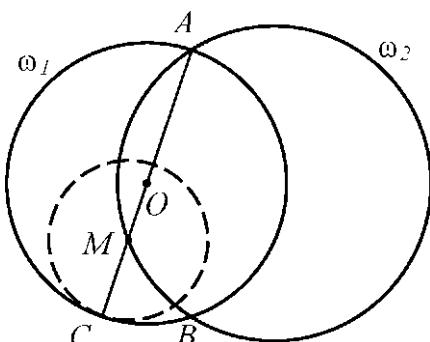
Решение. Сравним остатки чисел $n \cdot S(n)$ и 200 ... 0018 при делении на 3. По признаку делимости число и сумма его цифр имеют равные остатки при делении на 3. Значит, произведение $n \cdot S(n)$ при делении на 3 даёт такой же остаток, что и $S^2(n)$. Сумма цифр числа 200 ... 0018 равна 11, и значит, это число при делении на 3 даёт остаток 2. Таким образом, если равенство $n \cdot S(n) = 200 \dots 0018$ возможно, то $S^2(n)$ имеет остаток 2 при делении на 3. Поскольку квадрат любого целого числа при делении на 3 может давать только остаток 0 или 1, требуемое равенство невозможно.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что квадрат суммы цифр даёт остаток 2 при делении на 3 — 3 балла.

9-3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , причем дуга AB окружности ω_2 делит площадь окружности ω_1 пополам. Доказать, что длина этой дуги больше диаметра окружности ω_1 .

Решение: Очевидно, что центр O окружности ω_1 лежит внутри дуги AB (половина площади окружности не может находиться в одном полукруге). Обозначим M точку пересечения диаметра AC с дугой AB . Дуга AM больше хорды AM , Кроме того, длина дуги MB больше отрезка CM . Действительно, построим вспомогательную окружность с центром в точке M радиуса MC . Она целиком лежит внутри окружности ω_1 , значит, MB больше, чем радиус этой окружности.

Критерии. Указано положение центра O — 2 балла. За полное решение задачи 7 баллов.



9-4. Аня знает, что на дом задали квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. Она вспомнила, какие коэффициенты были у этого уравнения (они все положительны), но не помнит, на каком месте стоял каждый из них. На всякий случай она решила все 6 возможных вариантов уравнения и выписала их корни. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть в полученном списке?

Ответ. 8.

Решение. Может ли оказаться, что все 6 уравнений имеют корни? Рассмотрим пару уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$. Их дискриминанты совпадают и равны $b^2 - 4ac$. Предпо-

ложим, что дискриминанты всех 6 уравнений неотрицательны. Это сводится к трем соотношениям:

Перемножим эти три неравенства (это возможно, так как обе части неравенств положительны). Получим, что $a^2 b^2 c^2 > 64a^2 b^2 c^2$, пришли к противоречию.

Итак, одновременно могут выполняться не более двух неравенств из трех, то есть одна пара уравнений корней не имеет. Пусть для определенности выполняются первые два неравенства, тогда $c < \min(\Gamma^1, \Gamma^2)$. Например, подойдет тройка $a = 9, b = 18, c = 1$.

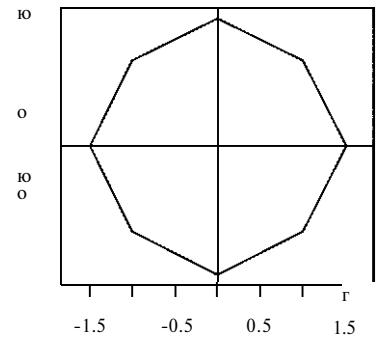
Найдем корни уравнений:

Все они различны.

Критерии. Показано, что корней не более 8 - 5 баллов, приведен пример - 2 балла.

9-5. Постройте график соотношения $\min(|x|, |y|) + 2 \max(|x|, |y|) = 1$ (график состоит из всех точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению).

Решение. Заметим, что искомый график симметричен. Действительно, вместе с точкой (x, y) в него входят $(-x, y)$ (симметрия относительно оси Oy), $(x, -y)$ (симметрия относительно Ox) и (y, x) (симметрия относительно прямой $y = x$). Значит, достаточно рассмотреть случай $0 < y < x$. При таких ограничениях уравнение принимает вид $y + 2x = 1$. График представляет собой отрезок этой прямой. Отражая его относительно всех осей симметрии, получим восьмиугольник.



Критерии. Описана симметрия графика - 2 балла, полное решение 7 баллов.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018

10 класс

10-1. Петя задумал трёхзначное число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй заявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Могло ли оказаться, что хотя бы четверо друзей оказались правы?

Ответ: Нет, не могло.

Решение. Предположим, что друг номер k — первый из друзей, который сказал правду. Тогда все последующие друзья также правы. Значит, правду сказали $10 - (k - 1) = 11 - k$ друзей. Условие, что таких не меньше 4, приводится к виду $11 - k > 4$, то есть $k < 7$. В частности, седьмой друг прав. Тогда n делится на 7, 8, 9 и 10, то есть на $\text{НОК}(7, 8, 9, 10) = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2520$. Значит, задуманное число не может быть трехзначным.

Критерии. Разобран только случай, когда ровно четверо друзей правы — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

2 2

10-2. Числа m и n взаимно просты. Каким может быть НОД чисел $m + n$ и $m^2 + n^2$?

Ответ. 1 или 2.

Решение. Пусть d — общий делитель чисел $a = \frac{m}{2} + \frac{n}{2}$ и $b = \frac{m^2}{2} + \frac{n^2}{2}$. Тогда на d делится также число $(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$ и числа $m^2 + n^2 + (m^2 - n^2) = 2m^2$ и $m^2 + n^2 - (m^2 - n^2) = 2n^2$.

В силу взаимной простоты m и n число d — делитель 2, то есть $\text{НОД}(m, n)$ равно 1 или 2. Оба случая реализуются. Если числа m, n нечетные, то $m + n$ и $m^2 + n^2$ — четные, так что $\text{НОД}(m + n, m^2 + n^2) = 2$. Если же m, n разной четности, то $\text{НОД}(m + n, m^2 + n^2) = 1$.

Критерии. Если НОД вычислен только для конкретных пар (m, n) — 0 баллов. Если показано что НОД есть делитель числа два — 4 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

10-3. а) В окружность вписан многоугольник с $n = 2017$ сторонами. Известно, что все его углы равны. Будут равными его стороны? б) Тот же вопрос, если $n = 2018$.

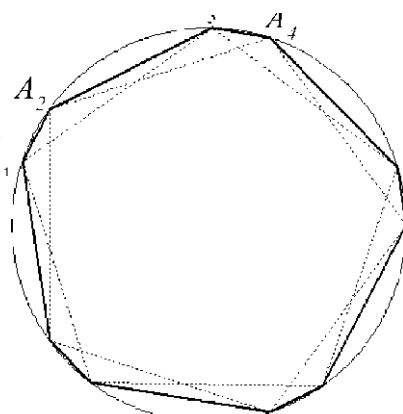
Ответ: а) да; б) не обязательно.

Решение. Обозначим вершины многоугольника через A_i , $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим четыре вершины, идущие подряд, например, A_1, A_2, A_3 и A_4 . У треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ углы $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ совпадают по условию задачи, а углы $A_2A_1A_3$ и $A_2A_4A_3$ — как опирающиеся на одну дугу. Значит, равны треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ (по общей стороне и двум углам) и, следовательно, $A_1A_2 = A_3A_4$, т.е. стороны равны через одну. Если число сторон нечетно, $n = 2017$, то $A_1A_2 = A_3A_4 = \dots = A_{2017}A_1 = \dots$, все стороны равны.

Если же n четно, то стороны могут и не совпадать между собой. Пример можно построить так: возьмем правильный многоугольник с $2018/2 = 1009$ сторонами.

Повернем его на маленький угол и соединим старые и новые вершины. Получится многоугольник с 2018 сторонами, равными через одну, и равными углами.

Критерии. Показано равенство сторон через одну — 3 балла. За полное решение только пункта а) 5 баллов. Приведен пример неправильного многоугольника в п. б) — 2 балла.



Ответ: и

Решение. Понизим степени слагаемых. Выражение примет вид

Сумму последних двух слагаемых можно переписать в виде $\frac{1}{2} \sin 2x + -\cos 2x$. Эта функция принимает значения от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$, откуда и получаем ответ.

Критерии. Получена формула (1) - 3 балла. Полное решение - 7 баллов.

10-5. Пусть a, b, c и d — действительные числа и $abcd = 1$. Докажите неравенство:

$$ab + be + cd + da < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$$

Решение. Заметим, что для произвольных p, q, x, y выполняется соотношение $(px + qy)^2 < (p^2 + q^2)(x^2 + y^2)$ (скалярное произведение векторов не превосходит произведения их длин).

Используя равенство $abcd = 1$, запишем каждое слагаемое левой части в виде дроби, а затем воспользуемся записанным выше неравенством. Имеем

В правой части оба слагаемых одинаковы. Оценим их сумму с помощью неравенства о средних: $2\sqrt{xy} < x + y$, тогда

что и требовалось доказать.

Замечание. Требуемое неравенство можно получить сразу, используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца для четырёх чисел:

Отсюда получаем требуемое неравенство. Знак равенства возможен только при условии $a = b = c = d = 1$.

Критерии. За использование неравенства Коши-Буняковского для двух или четырёх чисел без его доказательства баллы не снижаются.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018

11 класс

11-1. Числа x^1 и x^2 - различные корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, а $x^1 + 1$ и $x^2 + 1$ - корни уравнения $x^2 - p^2x + qp = 0$. Найти p и q .

Ответ. $p = 1$, $q < 1/4$ или $p = -2$, $q = -1$.

Решение. По теореме Виета имеем $x^1 + x^2 = -p$, $x^1x^2 = q$, $x^1 + x^2 + 2 = p^2$, $(x^1 + 1)(x^2 + 1) = pq$. Подставляя $x^1 + x^2$ и x^1x^2 из первой пары уравнений во вторую, получаем систему из двух уравнений $-p + 2 = p^2$, $q - p + 1 = pq$. Первое уравнение имеет два корня.

Если $p = 1$, второе уравнение превращается в тождество, ему удовлетворяет любое q . Значит, достаточно потребовать, чтобы уравнение $x^2 + x + q = 0$ имело два корня. Для этого дискриминант $1 - 4q$ должен быть положительным.

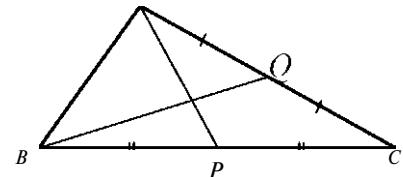
Если $p = -2$, то $q + 3 = -2q$, откуда $q = -1$. Уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корни.

Критерии. Если найден только второй ответ - 3 балла. Если в первом решении не указано ограничение на q - с общей суммы снимаются 2 балла.

11-2. Петя и Коле дали два одинаковых картонных треугольника. Каждый из них разрезал свой треугольник на два равных треугольника. Могут ли полученные ими части быть разными?

Ответ. Они все одинаковые.

Решение. Предположим, что Петя разрезал $\triangle ABC$ по отрезку AP . Площади равных треугольников равны, а высота у $\triangle ABP$ и $\triangle APC$ общая, значит, равны и основания, $BP = PC$. Итак, у треугольников $\triangle ABP$ и $\triangle APC$ есть по две равных стороны, так как AP - общая. Тогда в силу равенства этих треугольников совпадают и трети стороны, $AC = AB$. То есть исходный треугольник равнобедренный.



Если Коля делал разрез по той же медиане, то у него получились такие же треугольники, как у Пети. Если по другой, например, BQ , аналогично получаем, что $AB = BC$, то есть исходный треугольник равносторонний и все его половинки совпадают.

Замечание. Если не доказано, что разрез проходит по медиане, то необходимо проверять все варианты наложения треугольников $\triangle ABP$ и $\triangle APC$.

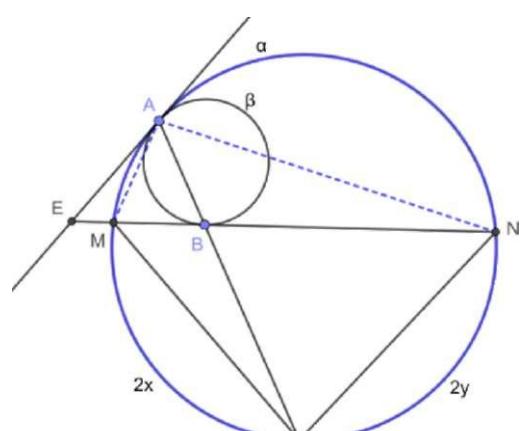
Возможны и другие решения, например, показать, что тупой угол $\angle APC$ не может совпадать ни с одним из углов треугольника $\triangle ABP$, так что условиям удовлетворяет только случай $\angle APC \geq 180^\circ$.

Критерии. Указано, что разрез идет по медиане - 2 балла. За полное решение задачи 7 баллов. Разбор только частных случаев равенства двух треугольников - 0 баллов.

11-3. Две окружности α и β касаются внутренним образом в точке A . Через точку M окружности α проведена хорда MN , касающаяся окружности β в точке B . Прямая AB пересекает окружность α в точке T (отличной от A). Докажите, что $MT = NT$.

Решение. Проведём через точку A общую касательную AE к окружностям и пусть E — точка пересечения прямых MN и AE (см. рисунок). Введём обозначения для углов: $\angle ZTM = x$, $\angle ZMN = y$ и $\angle ZMA = z$.

Вписанные углы $\angle TAM$ и $\angle TNM$ опираются на одну и ту же дугу MT , поэтому $\angle ZTAM = \angle ZTNM = x$; аналогично $\angle ZAN = \angle ZMN = y$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ZABE = z + y$. Заметим, что угол $\angle MAE$



между касательной и хордой также равен z , поэтому $ZEAB = z + x$.

Отрезки касательных EA и EB к окружности P равны, поэтому треугольник AEB — равнобедренный, и значит, $AEAB = ZABE$, то есть $z + x = z + y \Rightarrow x = y$. Значит, треугольник TMN — равнобедренный, и $MT = NT$.

В случае $AE \parallel MN$ прямая AB проходит через центры окружностей a и P , и так как радиус в точке касания перпендикулярен касательной, $AB \perp LMN$ и AB делит MN пополам. Отсюда снова получается $MT = NT$.

Критерии. В решении не разобран случай $AE \parallel MN$ — 6 баллов. Полное решение задачи - 7 баллов.

11-4. Предположим, что шахматный конь ходит буквой "Г" но не на 2 и 1 клетки, а на $n + 1$ и n клеток. За какое наименьшее число ходов он попадет на соседнюю клетку, находясь на бесконечной доске?

Ответ. За $2n + 1$ ход.

Решение. Заметим, что после каждого хода конь меняет цвет клетки. Так как соседняя клетка имеет противоположный цвет, коню придется сделать нечетное число ходов. Обозначим это число за $2k + 1$. При каждом ходе конь будет сдвигаться вправо или влево на n или $n + 1$ клетку. Предположим, что вправо он сделал больше ходов ($k + 1$ или больше). Пусть L^1 — суммарный сдвиг вправо, очевидно, что $L^1 > n(k + 1)$. При этом влево он мог сделать k или меньше ходов. Если L^2 — суммарный сдвиг влево, то $L^2 < (n + 1)k$.

После всех ходов он должен остаться на той же вертикали, поэтому $L^1 = L^2$. Получим $n(k + 1) < (n + 1)k$, откуда $k > n$.

Пример с $k = n$ легко построить: сдвигаемся за первые два хода на 1 клетку по диагонали. Повторив эту пару ходов n раз, окажемся на расстоянии n клеток по диагонали от исходной. Последним, $2n + 1$ -м ходом, становимся на соседнюю к исходной клетку.

Критерии. Только пример ходов коня - 0 баллов. Указание, что число ходов нечетно - 1 балл. Оценка для k без приведения примера - 5 баллов. Полное решение задачи - 7 баллов.

2 2

11-5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $\sin x + 10 \sin x \cos x - 23 \cos x$.

Ответ: 2 и -24.

Решение. Понизим степени слагаемых. Выражение примет вид

Сумму последних двух слагаемых можно переписать в виде

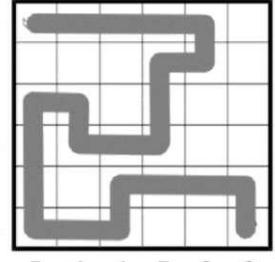
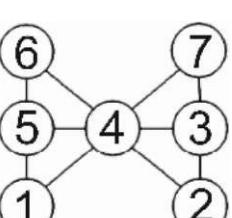
Здесь a — угол, такой, что $\cos a = 5/13$; $\sin a = 12/13$. Это выражение принимает значения от -13 до 13, откуда и получаем ответ.

Критерии. Получена формула (1) - 2 балла. Полное решение - 7 баллов.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.
2018-19 учебный год. 4 класс.

Ответы.

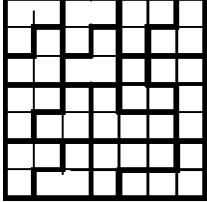
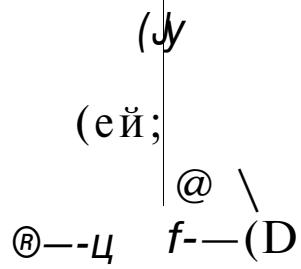
Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный - в 0 баллов, если не указано иное. За отсутствие единиц измерений баллы не снижать!

| Задача | Ответ | Задача | Ответ |
|--------|--|--------|---|
| 1. | $113 + 963 = 1076$ или $1139 - 63 = 1076$ - принимать любой из двух вариантов | | |
| 2. | 503, 504, 505, 506 | | |
| 3. | 8021 | | |
| 4. | 6 коров и 17 уток | | |
| 5. | 3 | | |
| 6. | 6 | | |
| 7. | 6211 | | |
| 8. | A и B - принимать только оба числа, при отсутствии неверных | | |
| 9. | 1900 | | |
| 10. | 8 | | |
| 11. | | | |
| | 89 | | |
| | Проверять, возможно есть другие варианты! | | |
| 12. | Катя | | |
| 13. | | |  |
| 14. | 16 | | |
| 15. | | |  |
| | Проверять, есть и другие варианты. В центральном кружочке должна стоять 4 | | |
| 16. | 1623 | | |
| 17. | 4 см^2 | | |
| 18. | 1 место - Заяц, 2 место - Медведь, 3 место - Волк, 4 место - Лиса | | |
| 19. | 130 | | |
| 20. | 20 | | |

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.
2018-19 учебный год. 5 класс.

Ответы

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное. За отсутствие единиц измерений баллы не снижать!

| Задача | Ответ | Задача | Ответ |
|--|-------|--|-------|
| 1. 675 | | 11. 441 см^2 | |
| 2. 8201 | | 12. Проверять пример! Например, так: $2 \times 2 \times (1 + 1) \times (2 + 0 + 1) + 8 = 32$ | |
| 3. 105 | | 13. 9 | |
| 4. 11 | | 14. 1,5 км или 1500 м | |
| 5. 3 | | 15. Ваня и Катя. Правильный ответ — 5 баллов. Один ответ — 2 балла. Два верных и один неверный — 2 балла. Любой другой ответ — 0 баллов | |
| 6. 27 | | 16. 19 | |
| 7.  <i>Например так. Дети могут придумать другие примеры!</i> <i>Проверять правильность.</i> <i>Любой верный ответ — 5 баллов!</i> | | 17. 8 см^2 | |
| 8. 98521 | | 18. Проверять расстановку чисел! Например так:  | |
| 9. 18 | | 19. Дима больше на 325 | |
| 10. 20 или 21. Правильный ответ — 5 баллов. Один ответ — 2 балла. Два верных и один неверный — 2 балла. Любой другой ответ — 0 баллов | | 20. 6 | |